数理解析研究所講究録
563巻 1985年 72-83

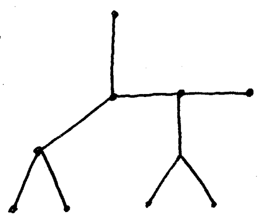
ω の高さをもつ closed 1-complex II.

東女大　小林一章(Kazuaki Kobayashi)

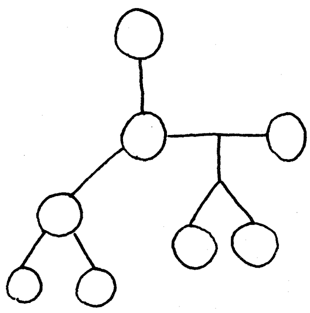
本論文は数解研講究録542号掲載の同名の論文に続くものです。

以下で closed 1-complex と言ったら特に断わらない限り次のような1次元複体Kとします。先ずTを頂点の degree が1又は3のみであるような tree (cycle を含まない1次元複体)とする。Tの degree 1 の全ての頂点に circle をつけ、いくつかの degree 3 の頂点を circle に置き代えたものをKとする。

例.　T:



K:



closed 1-complex K がコンパクト、向きづけ可能な3次元多様体 M^3 で 0-contractible とは、次の性質をもつ2次元複体Lと PL-写像 $f: L \longrightarrow M^3$ が存在する事である。

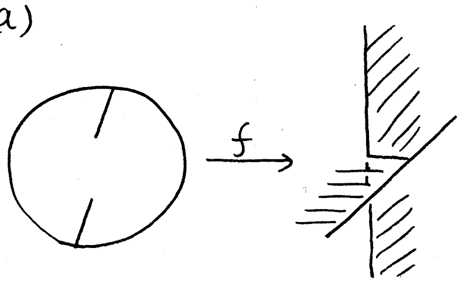
即ち (1) $\tilde{K}$ をKと同型な closed 1-complex としたとき、L

は$\tilde{K}$ の circle の部分に 2-ball を張った2次元複体である。（従って $|L-\tilde{K}|$ は開2-球体の非交和で，L は1点にカラプシブル） (2) $f(\tilde{K})=K$ かつ $f|\tilde{K}$ は埋め込みになっている。

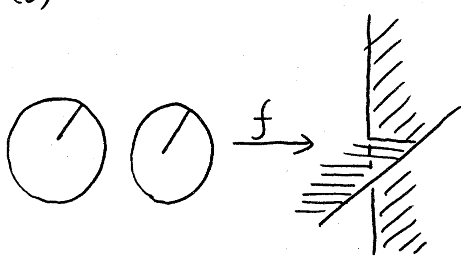
するとf$|\tilde{K}$ を固定するホモトピーで f を変形して f の特異点集合 $\{x\in L \mid \# f^{-1}f(x)\geq 2\}$ は次の3つのタイプのものに出来る([S])。

I. Clasp singularities

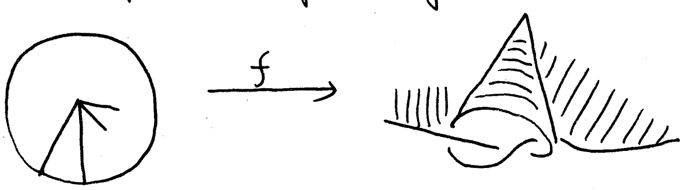
(a)



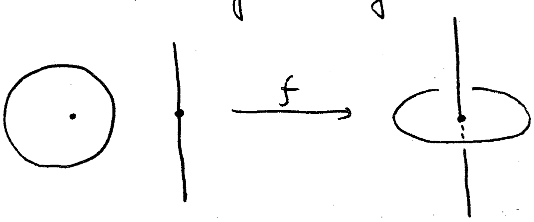
(b)



II. Branch point singularity



III Isolated singularity



V をハンドル体としたとき $sp(V)$ は V の1つのスパイン，$Sp(V)$ は V のスパインの集合とする（ただし $sp(V)$ は常に

closed 1-complex とし，特に V が3－球体の時は $sp(V)$ は1点とする。） closed 1-complex K が向きづけ可能なコンパクト3次元多様体 M^3 の中で<u>ω の高さをもつ</u>という事の定義は文献[K] を参照して下さい。

<u>定理2.</u> V を種数3のハンドル体とする。K を V に含まれている closed 1-complex とする。

V の中で $K_0 < K_1 < \cdots < K_n = K$ となる列があるなら次のいずれかの場合が起る。

(I) V 内に次の性質をもつコンパクト3次元多様体 W_i ($i = 0, 1, \cdots, n-1$) がある。即ち $W_i \supsetneqq U(K_i)$，$W_{i-1} \supsetneqq W_i$ かつ

$\pi_1(\partial W_i) \longrightarrow \pi_1(V - \mathring{U}(K_{n-1}))$ が $i = 0, 1, \cdots, n-1$ に対し単射. 又は

(II) ある i に対し $U(K_i) \subset B^3$ となる3－球体 B^3 が存在する。

<u>証明.</u> V 内で $K_0 < K_1 < \cdots < K_n = K$ だから ([K. Lemma 1. Cor. 1]) より $^\exists U(K_0) \supset {}^\exists U(K_1) \supset \cdots \supset U(K_n)$ 且つ

$g(U(K_0)) \geqq g(U(K_1)) \geqq \cdots \geqq g(U(K_{n-1}))$ また ([K. Lemma 3. Cor.]) より $g(U(K_0)) \leqq g(V) = 3$，もし $g(U(K_k)) \leqq 2$ なら定理1で証明されているから $g(U(K_k)) = 3$ とする。

先ず $k = n-1$ のとき $W_{n-1} \supset U(K_{n-1})$ かつ

$\pi_1(\partial W_{n-1}) \xrightarrow{i_{n-1*}} \pi_1(V - \mathring{U}(K_{n-1}))$ が単射であるか $U(K_{n-1})$ を含む3－球体 B^3 が存在する事を示す。

もし $\pi_1(\partial U(K_{n-1})) \xrightarrow{\tilde{i}_{n-1*}} \pi_1(V - \mathring{U}(K_{n-1}))$ が単射であれば $W_{n-1} = U(K_{n-1})$ とすればよい。

$\ker \tilde{i}_{n-1} \neq (e)$ のとき $\partial U(K_{n-1})$ 上に次の性質をもつ単純閉曲線 α が存在する。即ち $\alpha \not\simeq 0$ on $\partial U(K_{n-1})$ 且つ α は $V - \mathring{U}(K_{n-1})$ で特異点のない 2-ball D^2_α を張る。

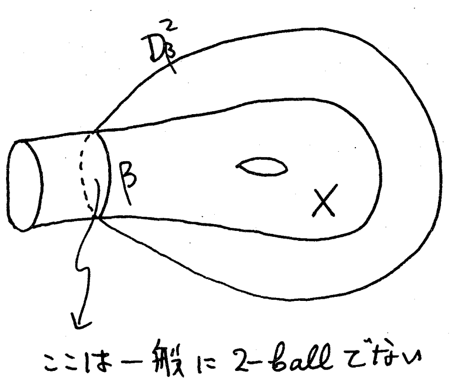
「$\partial U(K_{n-1})$ 上で $\alpha \sim 0$（ホモローグ）かつ α は $U(K_{n-1})$ で特異点のない 2-球体を張る」事が起ったとする。その特異点のない 2-球体を $\tilde{D}^2_\alpha$ とすると $\Sigma^2_\alpha = D^2_\alpha \cup_\alpha \tilde{D}^2_\alpha$ は 2-sphere で Σ^2_α は V で 3-球体 B^3_α を張る。$W_\alpha = U(K_{n-1}) \cup B^3_\alpha$ とする。W_α はハンドル体で $g(W_\alpha) < g(U(K_{n-1})) = 3$、$K_n$ が W_α で geometrically essential のとき $K_n \notin Sp(W_\alpha)$ である。何故ならもし $K_n \in Sp(W_\alpha)$ なら $K_n \subset U(K_{n-1}) \subset W_\alpha = \tilde{U}(K_n)$ となり [K, Lemma 1] に矛盾. 従って $K_n \notin Sp(W_\alpha)$ となり $\therefore$ $sp(W_\alpha) < K_n$ となる $sp(W_\alpha)$ がある事になり $K_{n-1} < K_n$ に矛盾. 次に K_n が W_α で geom. inessential なら $K_n \subset W_\alpha - D^2_1$ となる W_α の meridian 2-ball D^2_1 が存在する。このとき $K_n \subset U(K_{n-1}) \subset W_\alpha - D^2_1$ である。何故ならもし $U(K_{n-1}) \cap D^2_1 \neq \phi$ なら $U(K_{n-1}) \cap D^2_1 = \tilde{D}^2_1 \cup \cdots \cup \tilde{D}^2_p$ で $\tilde{D}^2_i$ は $U(K_{n-1})$ の meridian 2-ball. 従って K_n は $U(K_{n-1})$ で geom. essential だから $\tilde{D}^2_i \cap K_n \neq \phi$ $(i=1, 2, \cdots, p)$ $\therefore K_n \cap D^2_1 \neq \phi$ となり矛盾. $\therefore U(K_{n-1}) \subset W_\alpha - D^2_1$ そこでもし $K_n \in Sp(W_\alpha - D^2_1)$ なら（ここで $W_\alpha - D^2_1$ は genus 1 のハンドル体）.

$K_n \subset U(K_{n-1}) \subset W_\alpha - D_1^2 = \tilde{U}(K_n)$ となり (Lemma 1 [K]) に矛盾.

∴ $K_n \notin Sp(W_\alpha - D_1^2)$. 従って K_n が $W_\alpha - D_1^2$ で geom. essential なら $sp(W_\alpha - D_1^2) < K_n$ となり $K_{n-1} < K_n$ に矛盾. 更に K_n が $W_\alpha - D_1^2$ で geom. inessential なら $K_n \subset W_\alpha - (D_1^2 \cup D_2^2)$ となる $W_\alpha - D_1^2$ の meridian 2-ball D_2^2 がある。ところで $W_\alpha - (D_1^2 \cup D_2^2) \cong B^3$. 従ってこのとき K_n を含む 3-ball が存在し (II) が起る。以上より $\alpha \sim 0$ on $\partial U(K_{n-1})$ かつ α が $U(K_{n-1})$ で特異点のない 2-ball を張るときは K_n を含む 3-ball B^3 が存在し (II) が起る。

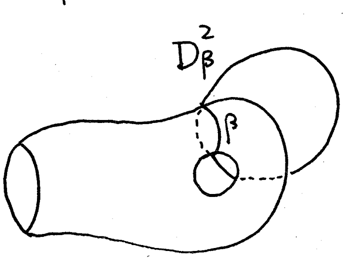
「$\alpha \nsim 0$ on $\partial U(K_{n-1})$ 且つ α は $U(K_{n-1})$ で特異点のない 2-ball を張る」この場合が起らない事は ([K. Th. 1]) の証明と全く同じに証明出来る. 次に $\{D_1^2, D_2^2, D_3^2\}$ を V の meridian ball system とすると ([K. Th. 1]) の証明と全く同じにして $\bigcup_{i=1}^{3} D_i^2 \cap D_\alpha^2 = \phi$ 且つ $\bigcup_{i=1}^{3} D_i^2 \cap U(K_{n-1}) = \tilde{D}_1^2 \cup \cdots \cup \tilde{D}_p^2$ で D_i^2 は $U(K_{n-1})$ に proper に埋め込まれた 2-ball で $\partial \tilde{D}_i^2$ は $\partial U(K_{n-1})$ で null-homotopic でない。そこで $\bigcup_{i=1}^{3} D_i^2$ で $U(K_{n-1})$ を cut したとき α を含む成分を U_α とすると $g(U_\alpha) \leqq 2$ であるが $g(U_\alpha) \leqq 1$ のときは ([K. Th. 1]) で証明済み. そこで $g(U_\alpha) = 2$ とする。$V_0 \equiv V - \bigcup_{i=1}^{3} \mathring{U}(D_i^2)$ とおくと $V_0 \cong B^3$ (i) $\alpha \nsim 0$ on $\partial U_\alpha - (\partial U_\alpha \cap \bigcup_{i=1}^{3} D_i^2)$ のとき $X \equiv U_\alpha \cup U(D_\alpha^2)$ とすると $\partial X \cong S^1 \times S^1$. もし X が solid torus なら $W_{n-1} \equiv U(K_{n-1}) \cup U(D_\alpha^2)$ は $U(K_{n-2})$ を含む genus 2 のハンドル体で、このと

きは前と同様にしてK_nを含む3-ballが存在するか$K_{n-1} < K_n$の条件③に矛盾する。従ってXはsolid torusでない。もし$\pi_1(\partial X) \longrightarrow \pi_1(V_0 - \mathring{W}_{n-1})$が単射でないなら$\partial X$上に次の性質をもつ単純閉曲線$\beta$がある。即ち$\beta \not\simeq 0$ on ∂X 且つβは$V_0 - \mathring{W}_{n-1}$で特異点のない2-ball D^2_βを張る。



(a) $\beta \sim 0$ on $\partial X - (\partial X \cap \bigcup_{i=1}^{3} D^2_i)$ のとき。$\partial(X \cup U(D^2_\beta)) \cong S^2 \cup (S^1 \times S^1)$は2つの成分になるが，$S^2$と同相な方の成分を$Y$とおくと$Y$は$V_0$で3-ball B^3をboundし，この3-ball B^3は$B^3 \supset X$且つ$B^3 \cap (W_{n-1} - \mathring{X}) = \phi$と取れる。従って$W'_{n-1} = W_{n-1} \cup B^3$とおくと$W'_{n-1}$はハンドル体で$g(W'_{n-1}) \leqq 1$且つ$U(K_{n-1}) \subset W'_{n-1}$となり，この時も前と同様にして$K_n$を含む3-ballが存在するか$K_{n-1} < K_n$の条件③に矛盾. 従ってこのとき$\pi_1(\partial X) \longrightarrow \pi_1(V_0 - \mathring{W}_{n-1})$は単射であるとしてよい。(又は(a)の場合が起らない).

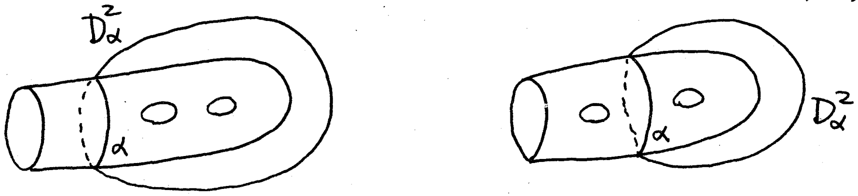
(b) $\beta \not\sim 0$ on $\partial X - (\partial X \cap \bigcup_{i=1}^{3} D^2_i)$ のとき. $\partial(X \cup U(D^2_\beta)) \cong S^2$.



従って3-ball B^3が存在し，$B^3 \supset X$且つ$B^3 \cap (W_{n-1} - \mathring{X}) = \phi$と取れる。そこで$W'_{n-1} = W_{n-1} \cup B^3$とおくと$W'_{n-1}$はハンドル体で$g(W'_{n-1}) \leqq 1$ 且つ$U(K_{n-1}) \subset W'_{n-1}$となりこの時

も前と同様にして K_n を含む3-ball が存在するか $K_{n-1} < K_n$ の条件③に矛盾. 従ってこのときも $\pi_1(\partial X) \longrightarrow \pi_1(V_0 - \mathring{W}_{n-1})$ は単射である。 従って van Kampen の定理より $\pi_1(\partial W_{n-1}) \longrightarrow \pi_1(V - \mathring{W}_{n-1})$ は単射.

(ロ) $\alpha \sim 0$ on $\partial U_\alpha - (\partial U_\alpha \cap \bigcup_{i=1}^{3} D_i^2)$ のとき，このときも $X \equiv U_\alpha \cup U(D_\alpha^2)$ がハンドル体なら(イ)のときと同様に証明略り. そこでハンドル体でないとする。$\partial(U_\alpha \cup U(D_\alpha^2)) \cong S^2 \cup (S^1 \times S^1 \# S^1 \times S^1)$ 又は $(S^1 \times S^1) \cup (S^1 \times S^1)$. 前者の場合は(イ)(a)の場合と同じ



後者の場合 $\pi_1(\partial X) \longrightarrow \pi_1(V_0 - W_{n-1})$ が単射でないなら ∂X 上に次の性質をもつ単純閉曲線 β がある。即ち $\beta \not\sim 0$ on ∂X 且つ β は $V_0 - \mathring{W}_{n-1}$ で特異点のない 2-ball D_β^2 を張る。(今度は $\beta \not\sim 0$ on $\partial X \Longleftrightarrow \beta \not\simeq 0$ on ∂X) このときは(イ)(b) の場合と同じにして K_n を含む3-ball が存在するか又は $K_{n-1} < K_n$ の③の条件に矛盾. 従って $\pi_1(\partial X) \longrightarrow \pi_1(V_0 - \mathring{W}_{n-1})$ が単射であり van Kampen を使って $\pi_1(\partial W_{n-1}) \longrightarrow \pi_1(V - \mathring{W}_{n-1})$ が単射となる。

次に $\pi_1(\partial W_{n-1}) \longrightarrow \pi_1(W_{n-1} - \mathring{U}(K_{n-1}))$ が単射である事を示す. もし単射でないなら単純閉曲線 β が ∂W_{n-1} 上に存在し, ∂W_{n-1} 上でホモトープ0でなく $W_{n-1} - \mathring{U}(K_{n-1})$ で特異点のない 2-ball D_β^2 を張る。 $\beta \subset \partial W_{n-1} - \mathring{U}(D_\alpha^2)$ としてよい。 ところが $W_{n-1} -$

$\mathring{U}(K_{n-1}) \simeq \partial U(K_{n-1}) \cup_{\partial} D^2_\alpha$ であり K_{n-1} からの radial projection によって $D^2_\beta \subset U(K_{n-1})$ と出来る。$\alpha \cap \beta = \phi$ かつ $\alpha \not\simeq \beta$ だから $D^2_\beta \cap \alpha = \phi$ と出来る。 ∴ $D^2_\alpha \cap D^2_\beta = \phi$. ∴ $D^2_\beta \subset \partial U(K_{n-1}) - D^2_\alpha$. ∴ $\beta \simeq 0$ in ∂W_{n-1}. これは矛盾.

∴ $\pi_1(\partial W_{n-1}) \longrightarrow \pi_1(W_{n-1} - \mathring{U}(K_{n-1}))$. は単射.

$$
\begin{tikzcd}
 & \pi_1(\partial W_{n-1}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\pi_1(W_{n-1} - \mathring{U}(K_{n-1})) \arrow[dr] & & \pi_1(V - \mathring{W}_{n-1}) \arrow[dl] \\
 & \pi_1(V - \mathring{U}(K_{n-1})) &
\end{tikzcd}
$$

van Kampen の定理と左の図より $\pi_1(\partial W_{n-1}) \longrightarrow \pi_1(V - \mathring{U}(K_{n-1}))$ は単射である。

次に $k = n-2$ のときを考える。

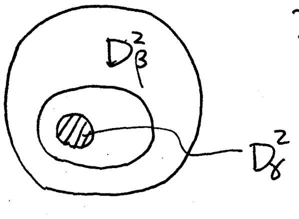
もし $\pi_1(\partial U(K_{n-2})) \xrightarrow{\tilde{i}_{n-2*}} \pi_1(V - \mathring{U}(K_{n-1}))$ が単射であれば $W_{n-1} \subset U(K_{n-2})$ である。何故なら $\pi_1(\partial U(K_{n-2})) \longrightarrow \pi_1(U(K_{n-2}) - \mathring{U}(K_{n-1}))$ が先ず単射である。何故ならもし単射でなければ $\partial U(K_{n-2})$ 上に単純閉曲線 α が存在して $\partial U(K_{n-2})$ 上で $\alpha \not\simeq 0$ 且つ α は $U(K_{n-2}) - \mathring{U}(K_{n-1})$ 内で特異点のない 2-ball D^2_α を bound する。すると $V \equiv \overline{U(K_{n-2}) - U(D^2_\alpha)}$ は genus が $U(K_{n-2})$ より小さいハンドル体で $U(K_{n-1}) \subset V$. これは $K_{n-2} < K_{n-1}$ に矛盾. 従って上の写像は単射. これと $\pi_1(\partial U(K_{n-2})) \xrightarrow{\tilde{i}_{n-2*}} \pi_1(V - \mathring{U}(K_{n-1}))$ が単射である事を仮定すると $W_{n-1} \subset U(K_{n-2})$ が示せる。

次に $\ker \tilde{i}_{n-2*} \neq \{e\}$ のとき. $W_{n-1} \subset U(K_{n-2})$ のときは $U(K_{n-1})$

からW_{n-1}を作った時と全く同じにして$W_{n-2}=U(K_{n-2})\cup U(D^2_{\alpha_1})$とする。ただし$\alpha_1$は$\partial U(K_{n-2})$上の単純閉曲線で$\partial U(K_{n-2})$上でnull homotopeでなく$V-\mathring{U}(K_{n-2})$で特異点のない2-ball $D^2_{\alpha_1}$をboundしているとする。$\pi_1(\partial W_{n-2})\longrightarrow\pi_1(V-\mathring{U}(K_{n-2}))$が単射である事は$k=n-1$の時と全く同じに示せる。(従って上のような$D^2_{\alpha_1}$が何個かあるときは実際には平行になっていると考えられる). 次に$\pi_1(\partial W_{n-2})\longrightarrow\pi_1(W_{n-2}-\mathring{U}(K_{n-1}))$が単射でなければ$\partial W_{n-2}$上に次の性質をもつ単純閉曲線$\beta$がある。即ち$\partial W_{n-2}$上でnull-homotopicでなく，$W_{n-2}-\mathring{U}(K_{n-1})$で特異点のない2-ball D^2_βを張る。$k=n-1$のときと同様に

$\pi_1(\partial W_{n-2})\longrightarrow\pi_1(W_{n-2}-\mathring{U}(K_{n-2}))$は単射だから

$D^2_\beta\cap\partial U(K_{n-2})\neq\phi$ また $\pi_1(\partial U(K_{n-2}))\longrightarrow\pi_1(U(K_{n-2})-\mathring{U}(K_{n-1}))$は単射だから$D^2_\beta\cap\partial U(K_{n-2})$の$D^2_\beta$でのinnermost component



D^2_γは$W_{n-2}-\mathring{U}(K_{n-2})$に含まれる。従って$D^2_\gamma$は$D^2_\alpha$と平行. これは$k=n-1$の時と同様にして矛盾.

$\therefore$ $\pi_1(\partial W_{n-2})\longrightarrow\pi_1(W_{n-2}-\mathring{U}(K_{n-1}))$ は単射.

そこで van Kampen の定理により

$\pi_1(\partial W_{n-2})\longrightarrow\pi_1(V-\mathring{U}(K_{n-1}))$が単射である事が示せた。以下同様に求める$W_k\supset U(K_k)$が作れる。

命題 $M^3 = V_1 \cup V_2$ を種数3以下の Heegaard splitting とする。KはV_1内の closed 1-complex でM^3でωの高さをもつとする。このとき次のいずれかが起る。

(1) KはV_1でωの高さをもつ.

(2) KはV_1で$K_0 < K_1 < \cdots < K_m = K$ 且つ $K_0 \in Sp(V_1)$ という列をもつ。

(3) KはWで$K_0 < K_1 < \cdots < K_m = K$ 且つ $K_0 \in Sp(W)$ という列をもつ。ただしWはV_1から適当な個数kの non-parallel meridian 2-balls を取り除いて出来る種数$n-k$のハンドル体.

(4). Kを含むM^3内の3-ball B^3がある。

証明 (1)以外の場合を考える。

(I) 先ずKがV_1で geometrically essential の場合を考える。([K. Lemma 3. Cor]) より. V_1で$K_0 < K_1 < \cdots < K_m = K$となる$m$が存在する。従って$V_1 \supset {}^{\exists}U(K_0) \supset {}^{\exists}U(K_1) \supset \cdots \supset {}^{\exists}U(K_m)$ 且つ $g(V_1) \geqq g(U(K_0)) \geqq \cdots \geqq g(U(K_{m-1}))$. もし$K_0 \in Sp(V_1)$なら(2)が起った事になる。$K_0 \notin Sp(V_1)$なら$V_1 \supset U(K_0)$だから $sp(V_1) < K_0$ となる$sp(V_1)$があるか又は$g(V_1) > g(U(K_{-1}))$で$K_{-1} < K_0$となるK_{-1}が存在する。前者の場合は$V_1 = K_0'$, $K_k = K_{k+1}'$ とおけば$K_0' < K_1' < \cdots < K_{m+1}' = K$で$K_0' \in Sp(V_1)$であり(2)が起った事になる。 後者の場合は$K_0' = K_{-1}$, $K_{k+1}' = K_k$とお

くと，$K'_0 < K'_1 < \cdots < K'_{m+1} = K$ in V_1 という列が存在する事になる。この列に関し同じ事を考えると $sp(V_1) < K'_0$ （即ち(2)が起る）又は $g(U(K'_{-1})) < g(V_1)$ で $K'_{-1} < K'_0$ in V_1 となる K'_{-1} が存在する。後者の場合が限りなく起ると結局

$$\cdots\cdots < K_{-2} < K_{-1} < K_0 < K_1 < \cdots\cdots < K_m = K \text{ in } V_1$$

即ち、初めに与えられた列が無限に延長出来る。この時は([K. Thm 1])の証明からわかるようにHakenの有限性定理に矛盾し，従ってこのような事は起らない。（この時([K. Thm 1])及び本論文定理2で示された結果を使うので種数が3以下という事がここで必要となる。）そこで V_1 で $K_0 < K_1 < \cdots < K_{m_0} = K$ であって且つ $K_{-1} < K_0$ in V_1，$g(U(K_{-1})) < g(V_1)$ となる K_{-1} が存在しないような m_0 が存在する。従ってこのとき $K_0 \in Sp(V_1)$ 即ち(2)が起る。

(II). K が V_1 で *geometrically inessential* のとき．Kと交わらない V_1 の *meridian 2-balls* が存在する（*up to ambient isotopy of* V_1）．それらの *non-parallel* な最大個数を k とし，その *system* を $\{D^2_1, \ldots, D^2_k\}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ とおく．$k = n$ のときは(4)が起る事になる。$W = \overline{(V_1 - \bigcup_{i=1}^{k} U_i(D^2_i))}$ とおくと W は種数 $n-k$ のハンドル体で K は W の中で *geometrically essential*．以下(I)と同じ議論を行なえばよい。

参考文献

[H] J. Hempel : 3-manifolds, Ann. Math. Study 86

[K] K. Kobayashi : ω の高さをもつ closed 1-complex, 数理解析研講究録 542. (1984).

[S]. N. Smythe : Handlebodies in 3-manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970) 534–538.